View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

Науковий вісник Львівського національного університету ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Ґжицького
Scientific Messenger of Lviv National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies

doi:10.15421/nvlvet8027

ISSN 2519–268X print
ISSN 2518–1327 online

http://nvlvet.com.ua/

УДК 539.319

Рівняння неоднорідної теплопровідності та квазістатичної термопружності стосовно робочих металево-скляних вузлів у механізмах харчових виробництв

В.О. Волос[1], Б.Р. Ціж[1,2], Ю.Ю. Варивода[1], В.М. Кобернюк[1]
Volosvalerij@gmail.com

[1]Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Ґжицького, вул. Пекарська, 50, Львів, 79010, Україна;
[2]Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz, Chodkiewicza, 30, Bydgoszcz, 85-064, Poland

В робочих вузлах машин і механізмів харчових виробництв часто зустрічаються неоднорідні металево-скляні спаї, які під час експлуатації зазнають значних зовнішніх температурних і силових навантажень. Тому досить актуальними є питання вивчення і аналізу термонапруженого стану таких вузлів з метою зменшення виникнення максимальних напружень і попередження руйнувань спаїв. В роботах був проведений аналітичний розрахунок термонапруженого стану таких неоднорідних структур на основі застосування апарату узагальнених функцій в математичній фізиці, використання властивостей їх алгебри, а також теорії інтегральних перетворень. При цьому спочатку розглядалось скінчене циліндричне тіло, яке містить не наскрізне включення типу порожнистого циліндра. Через торцеві та циліндричну поверхні тіла здійснюється теплообмін із навколишнім середовищем за законом Ньютона. Розглядувана система являє собою кусково-однорідне тіло, фізико-механічні характеристики якого постійні в межах кожного елемента і описуються за допомогою асиметричних одиничних функцій циліндричних координат. Відомо, що представляти фізико-механічні характеристики можна як з допомогою асиметричних функцій, так і за допомогою симетричних функцій, що приводить до одного й того ж розв'язку. Проте, враховуючи, що при представленні фізико-механічних характеристик кусково-однорідного тіла за допомогою асиметричних одиничних функцій, в тому самому вигляді представляється і будь-яка їх комбінація, зроблено висновок про те, що зручніше представляти фізико-механічні характеристики кусково-однорідного тіла за допомогою асиметричних одиничних функцій. Представляючи таким чином коефіцієнт теплопровідності, питому теплоємність і густину розглядуваного кусково-однорідного тіла через асиметричні одиничні функції циліндричних координат та використовуючи конструкцію множення асиметричних одиничних і дельта-функцій Дірака, виведено диференціальне рівняння теплопровідності з коефіцієнтами типу ступеневих функцій і дельта-функцій Дірака. Далі виводяться рівняння в переміщеннях квазістатичної задачі термопружності для тіла, що містить ненаскрізне порожнисте циліндричне включення. При цьому враховуються коефіцієнти Ляме, а також температурний коефіцієнт лінійного розширення-функції радіальної і осьової координат. В ці рівняння у вигляді постійних цих невідомих, входять граничні значення температури, а також об'ємної деформації. Як частковий, відмічається випадок, коли система розглядається як тіло одномірної кусково-однорідної структури, тобто, коли характеристики матеріалу залежать лише від радіальної координати.

Відмічено також випадок, коли коефіцієнт Пуасона постійний, а температурний коефіцієнт лінійного розширення і модуль пружності – функції циліндричних координат. В результаті записані диференціальні рівняння для циліндричного тіла для двовимірної та одновимірної неоднорідної структури. Відмічається випадок тонкостінного включення (товщина стінок порожнистого циліндра набагато менша ніж його серединий радіуса). В цьому випадку фізико-механічні характеристики представлені за допомогою дельта-функції Дірака. Використовуючи її властивості, отримані рівняння теплопровідності й термопружності для тіла двовимірної неоднорідної структури з коефіцієнтами у вигляді дельта-функцій Дірака. Далі отримані рівняння неоднорідної теплопровідності і квазістатичної задачі термопружності із ненаскрізними односторонніми включеннями типу порожнистого циліндра. При цьому розглядається безмежна пластина, одна із поверхонь якої теплоізольована, а через іншу здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого - деяка функція часу.

Citation:
Volos, V.A., Tsizh, B.R., Varyvoda, Y.Y., Kobernyuk, V.M. (2017). Application of inhomogeneous thermal conductivity equations and quasistatic thermo elasticity to the metal-glass components used in the mechanical food production. *Scientific Messenger LNUVMB*, 19(80), 128–134.

Ключові слова: *безмежна пластинка, чужорідне включення, ізотропне тіло, неоднорідна теплопровідність, казістатична задача термопружності, неоднорідний робочий вузол, металево-скляний спай, тонкостінне включення, узагальнені функції, одиничні асиметричні функції, коефіцієнти теплопровідності і теплоємності, коефіцієнти зсуву і Ляме, гіпотеза Кірхгофа-Лява, ненаскрізне і наскрізне включення.*

Уравнения неоднородной теплопроводности и квазистатической термоупругости применительно к рабочим метало-стекляным узлом механизмов пищевых производств

В.А. Волос [1], Б.Р. Циж[1,2], Ю.Ю. Варывода[1], В.М. Кобернюк[1]
Volosvalerij@gmail.com

[1]Львовский национальный университет ветеринарной медицины и биотехнологий имени С.З. Гжицкого, ул. Пекарская, 50, г. Львов, 79010, Украина;
[2]Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz, Chodkiewicza, 30, Bydgoszcz, 85-064, Poland;

В рабочих узлах машин и механизмов пищевых производств часто встречаются неоднородные металло-стеклянные спаи, которые во время эксплуатации подвергаются значительным внешним температурным и силовым нагрузкам. Поэтому достаточно актуальными являются вопросы изучения и анализа термонапряженного состояния таких узлов с целью уменьшения возникновения максимальных напряжений и предупреждения разрушений спаев. В работах был проведен аналитический расчет термонапряженного состояния таких неоднородных структур на основании применения аппарата обобщенных функций в математической физике, использование свойств их алгебры, а также теории интегральных преобразований. При этом сначала рассматривался конечное цилиндрическое тело, которое содержит не сквозное включения типа полого цилиндра. Через торцевые и цилиндрическую поверхности тела осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Рассматриваемая система представляет собой кусочно-однородное тело, физико-механические характеристики которого постоянны в пределах каждого элемента и описываются с помощью асимметричных единичных функций цилиндрических координат. Известно, что представлять физико-механические характеристики можно как с помощью асимметричных функций так и с помощью симметричных функций, что приводит к одному и тому же решению. Однако, учитывая, то что при представлении физико-механических характеристик кусочно-однородного тела с помощью асимметричных единичных функций в том же виде представляется и любая их комбинация, сделан вывод о том, что удобнее представлять физико-механический характеристик и кусочно-однородных тел с помощью асимметричных единичных функций. Представляя таким образом коэффициенты теплопроводности, удельной теплоемкости и плотность рассматриваемого кусочно-однородного тела через асимметричные единичные функции цилиндрических координат и используя конструкцию умножения асимметричных единичных и дельта-функций Дирака, выведено дифференциальное уравнение теплопроводности с коэффициентами типа ступенчатых функций и дельта-функций Дирака.

Затем выводятся уравнения в перемещениях квазистатической задачи термоупругости для тела, содержащего несквозное полое цилиндрическое включение. При этом учитываются коэффициенты Ляме, а также температурный коэффициент линейного расширения-функции радиальной и осевой координат. В эти уравнения в качестве постоянных этих неизвестных входят граничные значения температуры, производные по обеим координатам от перемещений, а также объемной деформации. Частичным отмечается случай, когда система рассматривается как тело одномерной кусочно-однородной структуры, то есть когда характеристики материала зависят только от радиальной координаты.

Отмечено также случай, когда коэффициент Пуассона постоянен, а температурный коэффициент линейного расширения и модуль упругости – функции цилиндрических координат. В результате записаны дифференциальные уравнения для цилиндрического тела для двумерной и одномерной неоднородной структуры. Отмечается случай тонкостенного включения (толщина стенок полого цилиндра гораздо меньше его срединного радиуса). В этом случае физико-механические характеристики представлены с помощью дельта-функции Дирака. Используя ее свойства, получены уравнения теплопроводности для тела двумерной неоднородной структуры с коэффициентами в виде дельта-функции Дирака. Далее получены уравнения неоднородной теплопроводности и квазистатической задачи термоупругости с несквозными односторонними включениями типа полого цилиндра. При этом рассматривается бесконечная пластина, одна из поверхностей которой теплоизолированная, а через другую осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, температура которого – некоторая функция времени.

Ключевые слова: *бесконечная пластинка, инородное включение, изотропное тело, неоднородная теплопроводность, казистатическая задача термоупругости, неоднородный рабочий узел, металло-стеклянный спай, тонкостенное включения, обобщенные функции, единичные асимметричные функции, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости, коэффициенты сдвига и Ляме, гипотеза Кирхгофа-Лява, несквозны и сквозные включения.*

Application of inhomogeneous thermal conductivity equations and quasistatic thermo elasticity to the metal-glass components used in the mechanical food production

V.A. Volos[1], B.R. Tsizh[1,2] , Y.Y. Varyvoda[1], V.M. Kobernyuk[1]
Volosvalerij@gmail.com

[1]Stepan Gzhytskyi National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies Lviv,
Pekarska Str., 50, Lviv, 79010, Ukraine;
[2]Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz,
Chodkiewicza, 30, Bydgoszcz, 85-064, Poland;

Inhomogeneous metal-glass junctions commonly used in the components of machinery and mechanisms of the food production are often exposed to external high temperature and heavy loading. Therefore further research and analysis of the thermo-stressed condition of such components with a purpose to decrease maximum tension and prevent damage, is deemed to be a quite applicable topic.In the studies an analytical calculation was made of the thermo stressed condition of such inhomogeneous structures based on the ьapplication of generalized functions in mathematical physics, using their algebra solutions as well as integral transform theory. Firstly the finite cylindrical body is analyzed, containing blank type inclusions of a hollow cylinder. Heat transfer between an object and ьenvironment takes place through the end-face and cylinder surfaces ьaccording to the Newton's law. This system is piecewise – homogeneous body, physic-mathematical characteristics of which is constant within each element and is described using asymmetric single functions of cylindrical coordinates. It is known that presentation of physic- ьmathematical characteristics is possible by application of asymmetric ьfunctions as well as symmetric function which both lead to the same ьresult. However considering that presentation of physic-mathematical ьcharacteristics of piecewise – homogeneous bodies by means of ьasymmetric functions also allows presentation of its every ьcombination, it is concluded that it is more convenient to present ьphysic-mathematical characteristics of piecewise – homogeneous bodies ьby means of asymmetric functions. As so, by presentation of the heat ьtransfer coefficient, thermal capacity and density of the analyzed ьobject by means of asymmetric functions of cylindrical coordinates and by applying method of multiplying asymmetric single and Dirak delta-function, a thermal conductivity differential equation is formulatedwith stage function coefficients and Dirak delta-function.

Then equation is formulated in a transfer of quasi-static thermoelasticity function for an object containing blank type hollow-inclusions. It is taken into account that the Lame parameters, as wellas coefficients of linear thermal expansion - both are functions ofradial and axial coordinates. In these equations the parameters of thevariables are maximum temperature figures, derivatives in bothcoordinates from transfer, as well as from volumetric strain. Particular is the case when a system is considered as a piecewise - homogeneous body structure, when characteristics of material are dependant only on a radial coordinate.

A case is noted when Poisson-factor is fixed and coefficients of linear thermal expansion and elastic modulus are functions of cylindrical coordinates. As a result differential equations for cylindrical body of two-dimensional and one-dimensional inhomogeneous structure are formulated.

Different is a case of thin-walled inclusion (the thickness of the wall of hollow cylinder is much less than its median radius). In this case physic-mathematical characteristics are presented by Dirak delta-function. Using its characteristics formulated is thermal conductivity and thermo elasticity equation for body of two-dimensional ьinhomogeneous structure with coefficients in the form of Dirak delta- function.

Further formulated is an equation of inhomogeneous thermal conductivity and quasi-static task of thermo elasticity for plates ьwith blind one-side inclusions of hollow cylinder type. By this, an infinite plate is analyzed, one of surfaces of which is thermo isolated, and through the second of which heat transfer with environment takes place, temperature of which is some function.

***Key words:** infinitive plate, foreign inclusions, isotropic body, inhomogeneous thermal conductivity, quasi-static task of thermo elasticity, inhomogeneous component, metal-glass junction, thin-walled inclusion, general functions, single asymmetric function, coefficient of thermal conductivity and heat capacity, the Lame parameters, the Kirchhoff-Love theory, blind and non-blind inclusions.*

Вступ

Для проведення досліджень радіальних і кільцевих температурних напружень у неоднорідних пластинах, що містять чужорідні циліндричні включення, широко використано метод, який заснований на застосуванні узагальнених функцій для зображення фізико-механічних і геометричних характеристик тіл неоднорідної структур як єдиного цілого і який також дає можливості розробляти проблеми термомеханіки для тіл дво- і тривимірної кусково-однорідної структури. На основі цього методу в роботі розглянуто віднесене до циліндричних координат r, φ, z ізотропне неоднорідне тверде тіло, фізико-механічні характеристики якого $P(r, \varphi, z)$ – функції вказаних координат. Підставивши у рівняння балансу тепла компоненти вектора теплового потоку для визначення температурного поля неоднорідного тіла, приходимо до такого рівняння теплопровідності у циліндричних координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_t \cdot \frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda_t \cdot \frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t \cdot \frac{\partial t}{\partial z}\right)=C\rho t-\omega_t. \quad (1)$$

Тут $\lambda_t(r, \varphi, z)$, $C(r, \varphi, z)$, $\rho(r, \varphi, z)$ – коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність і густина тіла відповідно, $\omega_t(r, \varphi, z, \tau)$ – густина джерел тепла, тобто кількість тепла, яка продукується в одиниці об'єму за одиницю часу всіма джерелами, а крапкою зверху позначено операцію диференціювання по часу τ.

Для знаходження залежності між компонентами деформації і переміщення використаємо співвідношення Дюгамеля–Неймана:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2\mu e_{rr} + \lambda e - \beta\theta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \varphi\varphi + \lambda e - \beta\theta, \\ \sigma_{zz} = 2\mu e_{zz} + \lambda e - \beta\theta, \\ \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}, \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}, \sigma_{z\varphi} = 2\mu e_{z\varphi} \end{cases} \quad (2)$$

У формулах (2) позначено: e_{rr}, $e_{\varphi\varphi}$, e_{zz}, $e_{r\varphi} = e_{\varphi r}$, $e_{rz} = e_{zr}$ – компоненти тензора деформації, u, v, ω – компоненти вектора переміщення, σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, $\sigma_{r\varphi} - \sigma_{\varphi r}$, $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$, $\sigma_{z\varphi} - \sigma_{\varphi z}$ – компоненти тензора напружень, $e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) + \frac{\partial \omega}{\partial z}$, $\beta - \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$, $\theta - t - t_0$ – приріст температури тіла, $\alpha_t(r, \varphi, z)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення, t_0 – початкова температура, при якій напруження у тілі відсутнє. Коефіцієнти Ляме $\lambda(r,\varphi,z)$, $\mu(r,\varphi,z)$, які у випадку ізотропного неоднорідного тіла є функціями координат, виражаються через модуль Юнга $E(r,\varphi,z)$, коефіцієнт Пуассона $\nu(r,\varphi,z)$ та модуль зсуву $G(r,\varphi,z)$ таким чином: $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Підставивши вираз для напруження (2) у рівняння рівноваги, приходимо до такого рівняння у переміщеннях

$$\Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{2}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{e}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial r}=0. \qquad (3)$$

Якщо ж фізико-механічні характеристики – функції однієї координати – полярного радіуса r, то замість (1), (2) буде

$$\begin{cases}\frac{1}{r\lambda_t}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_t\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{C\rho}{\lambda_t}\dot{t}-\frac{\omega_t}{\lambda_t},\\ \Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{2}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{e}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}(\beta\theta)=0.\end{cases} \qquad (4)$$

І, нарешті, у випадку одновимірної задачі будемо мати

$$\begin{cases}\frac{1}{r\lambda_t}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_t\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{C\rho}{\lambda_t}\dot{t}-\frac{\omega_t}{\lambda_t},\\ \Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial r}=0.\end{cases} \qquad (5)$$

А співвідношення Дюгамеля–Неймана в цьому випадку запишуться таким чином:

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=2\mu\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\beta\theta,\\ \sigma_{\varphi\varphi}=2\mu\frac{u}{r}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\beta\theta,\\ \sigma_{zz}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\beta\theta.\end{cases} \qquad (6)$$

Матеріали і методи дослідження

Отримання залежностей радіальних та кільцевих температурних напружень в неоднорідних пластинках, що містять чужорідні циліндричні включення, від полярного радіуса ґрунтувалось на розробці нових методів досліджень, які зводились до такого:

- отримано рівняння термопружності неоднорідних пластин, фізико-механічні характеристики яких – функції циліндричних координат;
- виведено рівняння теплопровідності і термопружності з коефіцієнтами типу імпульсних функцій для масивних тіл і тонких пластин із односторонніми включеннями типу порожнистого циліндра;
- розроблено методику побудови розв'язків задач теплопровідності та термопружності тіл із плоско-паралельними границями, які містять ненаскрізні і наскрізні тонкостінні включення. Методика заснована на застосуванні апарату узагальнених функцій і дозволяє отримувати замкнуті розв'язки, єдині для всієї ділянки їх визначення. Дана оцінка точності розв'язку задачі для тіл із тонкостінними включеннями;
- виконані дослідження радіальних і кільцевих температурних напружень в неоднорідному металевоскляному робочому вузлі, що складається із металевого сплаву 47НХР та міцністного скла С-93-1. При оптимізації конструкції такого неоднорідного вузла з точки зору виникнення мінімальних радіальних та кільцевих температурних напружень на межі «метал-скло» перед розробниками поставало завдання – або підбирати склад і властивості стекол під наявний метал, або створювати новий сплав і нові стекла. При виготовленні неоднорідних елементів таких робочих вузлів широко використовується властивість термоузгодженості металево-скляних спаїв. При цьому фізико-механічні характеристики компонентів спаю підбираються близькими між собою. Цим забезпечується потрібна термоміцність і вакуумна міцність сплавів. Таке прагнення до термоузгодженості спаїв викликає деяке пом'якшення неоднорідностей їх властивостей, що робить неоднорідність спаю слабшою. Це дозволяє використовувати при розрахунках температурних напружень гіпотезу Кірхгофа–Лява, і якщо включення відрізняються складною конфігурацією форми або значними геометричними розмірами, за рахунок чого у ряді випадків і виникає руйнування спаїв, то стає можливим оптимізувати такі конструкції залежно від геометричних розмірів включення. У зв'язку з цим виникає необхідність вивчення двовимірних температурних напружень в тілах із плоско-паралельними границями, що містять чужорідні включення типу порожнистого циліндра.

Дослідження температурних напружень в таких тілах у літературі були відсутні.

Для вивчення рівнянь теплопровідності пластинок, теплофізичні характеристики яких – функції циліндричних координат, розглянемо тонку неоднорідну пластинку товщиною 2δ, теплофізичні характеристики якої є довільними функціями циліндричних координат.

Припускаємо, що температура по товщині пластинки розподіляється за лінійним законом

$$t=T+\frac{z}{\delta}T^*, \qquad (7)$$

$$\text{де } T=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}t\,dz, \qquad T^*=\frac{3}{2\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta}zt\,dz \qquad (8)$$

Інтегруючи (3) відповідно з (8) після деяких перетворень для визначення інтегральних характеристик T і T^* отримуємо наступну взаємозв'язану систему диференціальних рівнянь теплопровідності для неоднорідних пластин

$$
\begin{cases}
\Lambda(r,\varphi)\Delta T + \Lambda^*(r,\varphi)\Delta T^* + \dfrac{\partial \Lambda(r,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{\partial \Lambda^*(r,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial T^*}{\partial r} + \dfrac{\partial \Lambda(r,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} + \\
+\dfrac{\partial \Lambda^*(r,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial T^*}{\partial \varphi} - \alpha_+(r,\varphi)[T - t_+^c(r,\varphi,\tau)] - \alpha_-(r,\varphi)[T^* - t_-^c(r,\varphi,\tau)] = \\
= C(r,\varphi)\dot{T} + C^*(r,\varphi)\dot{T}^*, \\
\Lambda^{**}(r,\varphi)\Delta T^* + 3\Lambda^*(r,\varphi)\Delta T^* + 3\dfrac{\partial \Lambda^*(r,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{\partial \Lambda^{**}(r,\varphi)}{\partial r}\dfrac{\partial T^*}{\partial r} + \\
+3\dfrac{\partial \Lambda^*(r,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \Lambda^{**}(r,\varphi)}{\partial \varphi}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial T^*}{\partial \varphi} - \\
-3\left\{\left[\alpha_+(r,\varphi) + \dfrac{1}{\delta^2}\Lambda(r,\varphi)\right]T^* - \alpha_+(r,\varphi)t_-^c(r,\varphi,\tau) + \alpha_-(r,\varphi)[T - t_-^c(r,\varphi,\tau)]\right\} = \\
= 3C^*(r,\varphi)\dot{T} + C^{**}(r,\varphi)\dot{T}^*.
\end{cases} \qquad (9)
$$

Тут уведені позначення:

$$
\Lambda(r,\varphi) = \int_{-\delta}^{\delta} \lambda_t(r,\varphi,z)dz, \quad \Lambda^*(r,\varphi) = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} z\lambda_t(r,\varphi,z)dz,
$$

$$
C(r,\varphi) = \int_{-\delta}^{\delta} C_v(r,\varphi,z)dz, \quad C^*(r,\varphi) = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} zc_v(r,\varphi,z)dz,
$$

$$
\Lambda^{**}(r,\varphi) = \frac{3}{\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta} z^2\lambda_t(r,\varphi,z)dz, \quad C^{**}(r,\varphi) = \frac{3}{\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta} z^2 c_v(r,\varphi,z)dz
$$

$$
\alpha_\pm = \alpha_z^+ \pm \alpha_z^-, \qquad t_\pm^c = \frac{t_c^+ \pm t_c^-}{2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.
$$

Умови теплообміну на циліндричній поверхні пластинки і початкова умова після диференціювання по z відповідно з T і T^* запишуться у вигляді:

$$
\lambda_t(r,\varphi,z)\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_S(T - T_S) = 0, \qquad \lambda_t(r,\varphi,z)\frac{\partial T^*}{\partial n} + \alpha_S(T^* - T_S^*) = 0 \quad (10)
$$

$$
T(r,\varphi,z,\tau) = T_0(r,\varphi,z), \qquad T^*(r,\varphi,z,\tau) = T_0^*(r,\varphi,z) \text{ при } \tau = 0\ , \quad (11)
$$

де T_S, T_S^*, T_0, T_0^* – інтегральні характеристики температур t_S, t_0.

У випадку, якщо теплофізичні характеристики не залежать від координати φ, система (9) набуває вигляду:

$$
\begin{cases}
\Lambda\Delta T + \Lambda^*\Delta T^* + \dfrac{\partial\Lambda\partial T}{\partial r\,\partial r} + \dfrac{\partial\Lambda^*}{\partial r}\dfrac{\partial T^*}{\partial r} - \alpha_+(T - t_+^c) - \alpha_-(T^* - t_-^c) = C\dot{T} + C^*\dot{T}^*, \\
\Lambda^{**}\Delta T^* + 3\Lambda^*\Delta T^* + 3\dfrac{\partial\Lambda^*}{\partial r}\dfrac{\partial \dot{T}^*}{\partial r} - 3\left[\left(\alpha_+ + \dfrac{1}{\delta^2}\Lambda\right)T^* - \alpha_+ t_-^c + \alpha_-(T - t_c^+)\right] = \\
= 3C^*\dot{T} + C^{**}\dot{T}^*
\end{cases} \qquad (12)
$$

Для однорідної ізотропної пластинки із рівнянь (9) витікають вже раніше відомі у літературі (Karslou and Eger, 1964) рівняння

$$
\Lambda\Delta T - \alpha_+(T - t_+^c) - \alpha_-(T^* - t_-^c) = C\dot{T},
$$

$$
\Lambda\Delta T^* - 3\left[\left(\alpha_+ + \frac{4}{r_0}\right)T^* - \alpha_+ t_-^c + \alpha_-(T - t_+^c)\right] = C\dot{T}^*,
$$

$$
\text{де } \Lambda = 2\lambda_{t_+}\delta,\ C = 2C_v\delta,\ r_0 = \frac{2\delta}{\lambda_t}.
$$

Результати та їх обговорення

У статті наведені розв’язки задачі неоднорідної теплопровідності та термопружності для пластин із не наскрізними односторонніми включеннями типу порожнистого циліндра для випадку, коли товщина стінки порожнистого циліндра значно менша, ніж радіус його серединної поверхні та висоти. При цьому використана взаємозв’язана система рівнянь рівноваги в переміщеннях для неоднорідних пластин. Отримані рівняння містять коефіцієнтами характеристичну функцію відрізка радіальної координати. Для випадку, якщо товщина включення значно менша за інші його розміри, шляхом граничного переходу виведено незв’язану систему диференціальних рівнянь термопружності, яка містить коефіцієнтами дельта-функцію Дірака та її першу і другу похідну. При цьому рівняння для визначення радіального переміщення є диференціальним рівнянням другого порядку, що містить коефіцієнтами дельта-функцію Дірака і її першу похідну, а рівняння для визначення прогину – диференціальними рівняннями четвертого порядку і містить коефіцієнтами дельта-функцію Дірака та дві її перші похідні. Відмічено частковий випадок, коли висота включення одного порядку малості з його товщиною. Записано загальні інтеграли виведених рівнянь. Розглянуто випадок наскрізного тонкостінного циліндричного включення. Отримані рівняння теплопровідності та термопружності пластин, що містять тонкостінне включення у вигляді кільцевого сектора. Припускається, що через поверхні кусково-однорідної пластинки здійснюється теплообмін із навколишнім середовищем за законом Ньютона, причому температури середовищ, які омивають ці поверхні, однакові. Фізико-механічні характеристики представляються тут за допомогою дельта-функції Дірака по радіальній координаті і характеристичної функції відрізка по кутовій координаті. Після перетворень отримано рівняння теплопровідності, що містить коефіцієнтами характеристичну функцію відрізка і дельта-функцію відрізка та дельта-функцію Дірака по кутовій координаті, дельта-функцію і її першу похідну по радіальній координаті. Отримана також відповідна взаємозв'язана система рівнянь термопружності у переміщеннях. Відмічено випадок, коли фізико-механічні характеристики розглядуваної системи є функціями лише кутової координати.

Розглянуто неоднорідний робочий вузол, який виготовлено зі скла С95-3 та чужорідного металевого сплаву 47НХР. При спайці металу зі склом досягається найбільша температура $t_C - 440°C$. Початкова температура $t_C - 20°C$. Отже, $t_C^* = 420°C$. Середнє значення температурного коефіцієнта лінійного розширення в інтервалі температур $20 - 440\,°C$ для скла С95-3 і сплаву 47 НХР відповідно такі: $\alpha_t^{(1)} = 99 \cdot 10^{-7} K^{-1}$, $\alpha_t^{(0)} = 105 \cdot 10^{-7} K^{-1}$. Механічні характеристики для цих матеріалів $E_1 = 6{,}8 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{м}^2}$, $v_1 = 0{,}28$; $E_0 = 17{,}12 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{м}^2}$, $v_0 = 0{,}3$.

Розрахунки радіальних σ_{rr} та кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$ температурних досліджень у склі С95-3 та на поверхнях $Z - +\delta$, $Z - \delta - d$, $Z - 0$, $Z - -\delta$ при геометричних параметрах $d = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м, $R = 5{,}85 \cdot 10^{-3}$ м, $2\delta = 11{,}7 \cdot 10^{-3}$ м, $2h = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ м проведені за формулами:

$$\sigma_{rr} - \frac{1}{2\delta}\left(N_r + \frac{3z}{\delta^2}M_r\right), \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2\delta}\left(N_\varphi + \frac{3z}{\delta^2}M_\varphi\right),$$

де

$$N_r = 4\delta\left[(\varphi_1 + \mu_1)\frac{du}{dr} + \varphi_1\frac{u}{r} - X_1 t_C^*\right],$$

$$N_\varphi = 4\delta\left[\varphi_1\frac{du}{dr} + (\varphi_1 + \mu_1)\frac{u}{r} - X_1 t_C^*\right],$$

$$M_r = -\frac{8}{3}\delta^3\left(\psi_1\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\varphi_1}{2r}\frac{d\omega}{dr}\right),$$

$$M_\varphi = -\frac{8}{3}\delta^3\left(\frac{\varphi_1}{2}\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\psi_1}{r}\frac{d\omega}{dr}\right).$$

Проаналізовано залежності радіальних σ_{rr} і кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$ температурних напружень від полярного радіуса в пластинці, що містить ненаскрізне циліндричне включення, подані і досліджені у вигляді графіків на таких поверхнях пластинки:

1) на верхній поверхні $Z - +\delta$ пластинки;
2) на поверхні $Z = \delta - d$, що проходить всередині пластинки, де закінчується чужорідне включення, і паралельної її боковим поверхням;
3) на серединній поверхні $Z = 0$ пластинки;
4) на нижній її поверхні $Z - -\delta$, де включення немає.

Розглянуто два випадки: вільного опирання та випадок жорсткого защемлення пластинки на безмежності.

Аналіз напружень проведений лише у склі, оскільки міцність скла значно нижча ніж від міцності металевого включення. Із аналізу проведеного для випадку вільного опирання випливає, що всередині включення напруження на всіх досліджуваних поверхнях пластинки приймають постійні значення. За границями включення зі збільшенням полярного радіуса вони менш-більш плавно на різних інтервалах зміни радіуса зменшуються, але після величини $r = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м їх зменшення практично припиняється. Радіальні температурні напруження на поверхнях $Z = +\delta$, $Z = \delta - d$, $Z = 0$ всередині включення являються розтягуючими. При цьому максимального значення досягають напруження на поверхні $Z = +\delta$ $\left(8{,}3 \cdot 10^5 \frac{\text{H}}{\text{м}^2}\right)$. У склі, ззовні включення, в ділянці розтягу є напруження, які лежать на поверхні $Z = -\delta$, причому максимального значення вони досягають на стику скла і включення. Для випадку жорсткого защемлення максимальні стискуючі напруження $\left(-4{,}17 \cdot 10^7 \frac{\text{H}}{\text{м}^2}\right)$ досягаються на поверхні $Z = +\delta$, а найменші на поверхні $Z = -\delta$.

Із загального аналізу графіків випливає, що:

- максимальної величини температурні напруження досягають на поверхні спаю скла і металевого включення;
- як радіальні, так і кільцеві напруження у склі, всередині циліндричного включення, мають постійне, на однакових поверхнях рівне між собою значення;
- як радіальні, так і кільцеві напруження порівняно швидко зменшуються до нуля із збільшенням полярного радіуса, збурення напружень, викликане наявністю включення, зменшуються на відстані двох серединних радіусів включення.

Висновки

1. Розроблена методика побудови розв'язків задач теплопровідності та термопружності тіл із плоско-паралельними границями, що містять ненаскрізні і наскрізні циліндричні тонкостінні включення. Методика заснована на представленні фізико-механічних характеристик кусково-однорідних тіл як єдиного цілого за допомого асиметричних одиничних функцій відрізка і приведення із використанням інтегральних перетворень і алгебри асиметричних узагальнених функцій сформульованих задач до розв'язку звичайних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами типу імпульсних функцій.
2. Отримано диференціальні рівняння квазістатичної задачі термопружності неоднорідних пластин, фізико-механічні характеристики яких – функції циліндричних координат. Розглянуто випадок, коли фізико-механічні характеристики не залежать від кутової координати.
3. Отримана взаємозв'язана система диференціальних рівнянь з коефіцієнтами типу ступеневих функцій і дельта-функції Дірака теплопровідності та тер-

мопружності пластин із ненаскрізними односторонніми включеннями типу порожнистого циліндра. Приведені часткові випадки: товщина стінки включення мала порівняно з його серединним радіусом; пластина містить наскрізне включення у вигляді порожнистого циліндра, висота якого дорівнює товщині пластини; висота включення одного порядку малості з його товщиною.

4. Побудовано замкнутий розв'язок двовимірної стаціонарної задачі теплопровідності для шару із ненаскрізним включенням, єдиний для всієї області його визначення, коли на круговій частині верхньої поверхні шару задані стоки тепла, що задані стрибкоподібно, а нижня його поверхня підтримується при заданій температурі.

5. Знайдено замкнутий розв'язок задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термопружності для безмежної пластинки з двосторонніми приповерхневими включеннями у вигляді однакових порожнистих циліндрів, розташованих симетрично відносно серединної площини у випадку локального її нагрівання зовнішнім середовищем.

Бібліографічні посилання

Vladimirov, V.S. (1979). Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike. M.: Nauka (in Russian).

Karslou, G., Eger, D. (1964). Teploprovodnost' tverdyh tel. M.: Nauka (in Russian).

Kech, V., Teodoresku, P. (1978). Vvedenie v teoriju obobshhjonnyh funkcij s prilozhenijami v tehnike. M.: Mir (in Russian).

Lomakin, V.A. (1976). Teorija uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU (in Russian).

Ljubimov, M.L. (1968). Spai metalla so steklom. M.: Jenergija (in Russian).

Received 26.09.2017
Received in revised form 17.10.2017
Accepted 20.10.2017